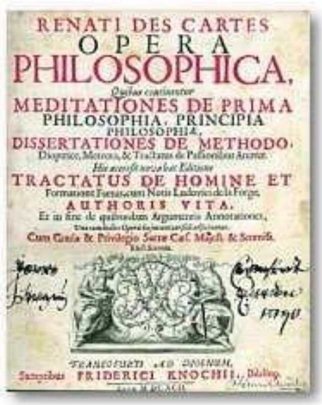
MATEMÁTICAS

1. LOS EJES CARTESIANOS
2. UNA BREVE HISTORIA DE LAS FUNCIONES
3. HISTORIA DE LA TRIGONOMETRÍA
4. LA PARADOJA DE LA ÍNSULA BARATARIA Y OTRAS PARADOJAS
5. PASO AL LÍMITE: ANTECEDENTES. EL MÉTODO EXHAUSTIVO
6. CRIPTOGRAFÍA Y MATEMÁTICAS
7. LA HABITACIÓN DE FERMAT
8. EL HOMBRE DE VITRUVIO
9. PROPORCIONALIDAD Y ELECCIONES
10. EMMY NOETHER, LA MUJER QUE REVOLUCIONÓ LAS MATEMÁTICAS
11. MATEMÁTICAS CON SEDE ANDALUZA
12. LA APUESTA

LOS EJES CARTESIANOS


RENATI DES CARTES
OPERA
PHILOSOPHICA,
MEDITATIONES DE PRIMA
PHILOSOPHIA, PRINCIPIA
PHILOSOPHIÆ,
DISSERTATIONES DE METHODO.
TRACTATUS DE HOMINE ET
AUTHORIS VITA.
FRIDERICI KNOCHII.

René Descartes, nacido el 31 de Marzo de 1596 en el seno de una acomodada familia francesa, no tuvo la suerte de conocer a su madre, que murió pocos días después de dar a luz. Pero tuvo un padre inteligente que tomó a su cargo su educación, eligiendo para él una de las mejores escuelas de Francia: el colegio de los jesuitas de La Flèche. Y para mayor suerte, el rector de esa escuela era un tal padre Charlet, que de inmediato comprendió tres cosas: la extraordinaria inteligencia de aquel muchacho, su deseo de saber y su agilidad mental. Por eso, dándose cuenta que para permitir que ese cerebro se desarrollase plenamente se debía robustecer el soporte físico, el padre Charlet permitió al joven Descartes que cada mañana permaneciera en la cama todo lo que quisiera y fuera a las aulas cuando lo deseara. El muchacho, después de los sueños de la noche, se despertaba y permanecía bajo las mantas rumiando sus pensamientos, las nociones que se le impartían, las discusiones que luego tendría con sus maestros. “Toda mi filosofía y mi matemática – diría más tarde el estudioso- surgen de las tranquilas meditaciones que podía hacer sin que me molestaran en mi cama.” Con apenas catorce años discute las demostraciones y las casuísticas que los maestros, según la tradición de los jesuitas, le sugieren y de esa época es su “cogito ergo sum” (pienso, luego existo).

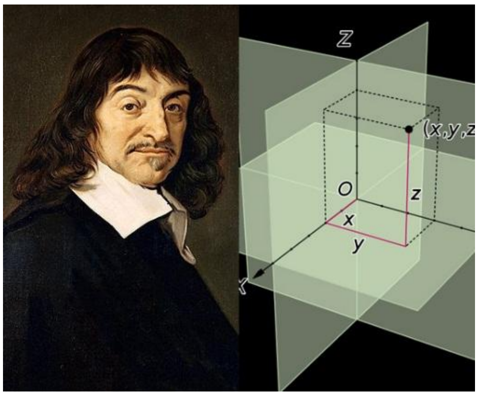
A los diecisiete años no tiene nada más que aprender en el colegio. Parte para París. Se dedica a vivir, al juego, pero de nuevo es presa de la pasión del estudio; se retira a Saint Germain y durante dos años trabaja ininterrumpidamente. Después se enrola como soldado bajo el príncipe de Orange. Y empieza una serie de peregrinaciones que lo llevaron a enrolarse en otro ejército, a trasladarse a Francfort, a Baviera y a Bohemia.

El 10 de noviembre de 1619 el intelecto de Descartes se deslumbró con un sueño. Él mismo contó que se había despertado lleno de entusiasmo porque ese sueño le había dado la “llave mágica” base de todas las ciencias. Descartes no reveló explícitamente a nadie en qué consistía esa “llave” pero hay elementos para creer que se trata de la idea de aplicar el álgebra a la geometría, o sea el nacimiento de la *geometría analítica* y luego la del empleo de las matemáticas para explicar los fenómenos naturales.

Descartes tenía entonces veintidós años y sobre esa “llave” estudió durante otros dieciocho, antes de dar a luz su *Discurso del Método*. No fueron años de tranquila meditación porque Descartes –extrañamente convencido de que el reposo coincide con la vida militar- volvió a enrolarse, tomó parte en la conquista de Praga y en 1621 se embarcó para Frisia. Era rico, bien vestido, elegante. Los marineros planearon matarlo para robarle. Pero Descartes, que conocía su lengua, descubrió los planes y, soldado como era, espada en mano, obligó a que lo desembarcaran.

Viajó aún mucho, fue a Roma para el Jubileo y –extrañísima miseria en un hombre como él- tal vez consideró poco interesante un encuentro, y por lo tanto una verificación de sus ideas con las de Galileo Galilei. Descartes volvió a Francia manifestando unos rencorosos celos frente al “descubridor de los mundos”. Fue una verdadera lástima, porque si Descartes hubiera tenido la humildad de escuchar algunas lecciones del padre de la ciencia moderna, sus especulaciones filosóficas habrían sido menos fantásticas y más dignas de su revolución en el campo de las matemáticas.

Acabamos de decir que Descartes basó su renovación de la geometría en el soporte de pocas ideas. Es verdad que había leído y profundizado las obras de los matemáticos griegos y de sus sucesores hasta sus contemporáneos y se había dado cuenta de esta verdad: para los griegos, la geometría era la reina de las matemáticas; el álgebra y los procedimientos relativos de cálculo derivaban de ésta, con todos los límites que esto implica.



Descartes realizó la operación inversa. Para él la aritmética y el álgebra precedieron a la geometría en el plano de la lógica, pero además son superiores a ésta en cuanto representan una “ciencia de las magnitudes” más general, que entre todas las innumerables aplicaciones permite una inigualable para la misma geometría. Es el paso a la época moderna: de las *matemáticas geometrizadas*, a las *matemáticas algebraizadas.*

Hasta los más desprovistos de conocimientos científicos saben qué son los *ejes cartesianos*. Descartes, por cierto, tomó esa idea de los antiguos y la desarrolló con claridad, llevándola a sus fundamentales consecuencias. Merece que hablemos de esto durante un momento.

Imaginemos dos rectas perpendiculares entre sí. Subdividamos esos *ejes* (cuyo punto de encuentro se llama *origen*) en tantos segmentos grandes o pequeños como queramos, a gusto; en otras palabras, creemos una escala de medida. Y bien, cualquier punto, cualquier figura de cualquier forma o dimensión yacente en el plano de las dos rectas es perfectamente identificable y mensurable, haciendo referencia a los puntos de la escala que hemos señalado en los dos *ejes*.

Pareciera que esta idea se le ocurrió a Descartes observando una mosca que sobrevolaba por el techo de su cuarto. Los ángulos del cuarto le sugirieron la idea de los *ejes*.

Póngase bajo los *ejes* un mapa y dese a la recta vertical la indicación norte-sur y a la horizontal la dirección este-oeste y desde ese momento podremos conocer la posición de cualquier punto de la Tierra con la medida de latitud y longitud que se refiera a la escala preelegida en las coordenadas.

Pero veamos que sucede con la geometría. Encuadrada por los *ejes*, todos los puntos de cualquier figura, no sólo son perfectamente localizables, sino que son reducibles a ecuaciones. Por otra parte, pueden inventarse ecuaciones que correspondan a cualquier figura: esa es la *geometría analítica*. No sólo supera los límites de la geometría griega sino que toda forma geométrica, con el nuevo método puede ser analizada, estudiada a fondo, conocida en toda su relación y característica: todo sin tener la necesidad de dibujarla, sino simplemente realizando operaciones algebraicas.

Lo que hemos visto con respecto a dos coordenadas (o sea para figuras planas) puede ser aplicado inmediatamente al espacio para los sólidos y entonces tendremos tres ejes coordenados; para la geometría mecánica y para la relatividad donde debe considerarse una cuarta dimensión –el tiempo- emplearemos cuatro coordenadas; en fin, para cualquier espacio imaginable por los matemáticos y con *n* dimensiones, podremos resolver el problema imaginando *n* coordenadas.

Esta es en síntesis la obra de Descartes. Famoso y honrado por todo el mundo a los cincuenta años fue llamado a Estocolmo por la reina Cristina de Suecia, apasionada de su obra. Era en 1646. Descartes prefirió permanecer otros tres años en tierra holandesa y finalmente aceptó la invitación. Tuvo un recibimiento triunfal, pero su vida en la capital escandinava no le gustaba demasiado. Contra su regla predilecta se veía obligado a veces a levantarse al alba para las lecciones a su real alumna; tal vez también la quiso. Murió un año después de su llegada a Suecia.

ACTIVIDADES

1. *Elabora un eje temporal en el que se muestren los principales acontecimientos de la vida de René Descartes.*

2. *Redacta un comentario con tus impresiones y opiniones sobre el texto Los ejes cartesianos*

3. *Señala en un mapa de Europa los lugares mencionados en el texto en los que transcurre la vida de Descartes.*

UNA BREVE HISTORIA DE LAS FUNCIONES

En las matemáticas actuales el concepto de función se define del modo siguiente:

Sean **A** y **B** conjuntos. Se llama **función** entre **A** y **B** a cualquier relación establecida entre los elementos de **A** y **B** de tal modo que a cada elemento de **A** le corresponde un único elemento de **B**. Para representar las funciones se suele utilizar la notación:

f : **A** →**B** para los conjuntos, **f(x)=y** para los elementos

A se llama *conjunto inicial* y **B** es el *conjunto final*

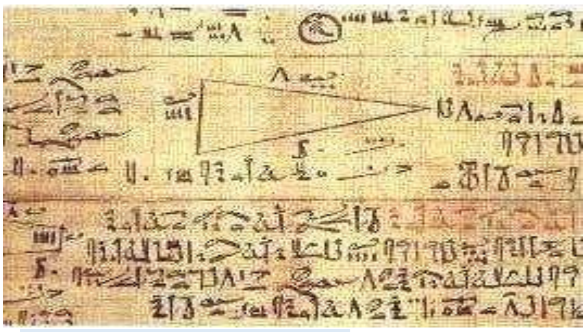
f(x)=y expresa como ***y*** *es la imagen de* ***x*** *a través de la aplicación* ***f***.

Se pueden definir funciones entre cualquier tipo de conjuntos, pero las más interesantes son las que se establecen entre conjuntos de números.

La pregunta que cabe hacerse ahora es: ¿cómo se ha llegado hasta aquí? Es importante entender que el concepto se desarrolló con el paso del tiempo; su significado fue cambiando y también la forma en que se definía, ganando precisión a través de los años.

Lo más apropiado, quizás, sea comenzar en Mesopotamia. En las matemáticas babilónicas encontramos tablas con los cuadrados, los cubos y los inversos de los números naturales. Estas tablas sin duda definen funciones de **IN** en **IN** o de **IN** en **IR**, lo que no implica que los babilonios conocieran el concepto de función. Conocían y manejaban funciones específicas, pero no el concepto abstracto y moderno de función.

En el antiguo Egipto también aparecen ejemplos de usos de funciones particulares. Aparecen en el Papiro Rhind o Papiro Ahmes, de unos 4000 años de antigüedad considerado como el primer tratado de matemáticas que se conserva.

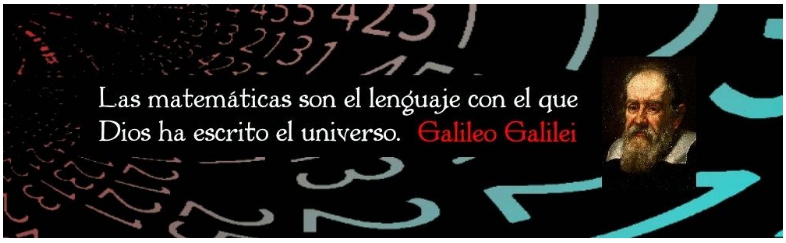

Detalle del Papiro Ahmes

En la Grecia clásica también manejaron funciones particulares —incluso en un sentido moderno de relación entre los elementos de dos conjuntos y no sólo de fórmula— pero es poco probable que comprendieran el concepto abstracto (y moderno) de función.

La mayor parte de los historiadores de las matemáticas parecen estar de acuerdo en atribuir a Nicole Oresme (13231382) la primera aproximación al concepto de función, cuando describió las leyes de la naturaleza como relaciones de dependencia entre dos magnitudes. Fue el primero en hacer uso sistemático de diagramas para representar magnitudes variables en un plano.

En la revolución científica iniciada en el siglo XVI los científicos centraron su atención en los fenómenos de la naturaleza, poniendo énfasis en las relaciones entre las variables que determinaban dichos fenómenos y que podían ser expresadas en términos matemáticos. Era necesario comparar las variables, relacionarlas, expresarlas mediante números y representarlas en algún sistema geométrico adecuado.

Galileo Galilei (1564-1642) pareció entender el concepto de función aún con mayor claridad. Sus estudios sobre el movimiento contienen la clara comprensión de una relación entre variables. Entre las funciones que estudió Galileo destacan, por sus sorprendentes consecuencias:



La función *uno-a-uno* **n** →**n**^{2} entre los naturales y sus cuadrados, que demuestra que hay tantos números naturales como cuadrados perfectos.

Casi al mismo tiempo que Galileo llegaba a estas ideas, Renè Descartes (15961650) introducía la *geometría analítica*. Descartes desarrolló y llevó a sus fundamentales consecuencias las ideas que siglos atrás se habían usado para representar en el plano relaciones entre magnitudes. Ahora cualquier curva del plano podía ser expresada en términos de ecuaciones y cualquier ecuación que relacionara dos variables podía ser representada geométricamente en un plano.

A finales del siglo XVII aparece por primera vez el término *función*. En palabras de Johann Bernoulli, una función es *"una cantidad formada de alguna manera a partir de cantidades indeterminadas y constantes".* Pero no fue hasta 1748 cuando concepto de función saltó a la fama en matemáticas. Leonhard Euler, uno de los grandes genios de las matemáticas de todos los tiempos, publicó un libro, *Introducción al análisis infinito,* en el definió función como:

Una función de una cantidad variable es una expresión analítica compuesta de cualquier manera a partir de la cantidad variable y de números o cantidades constantes.

Pero Euler no define *expresión analítica*. Así que poco después, en 1755, tuvo que precisar su definición:

Si algunas cantidades dependen de otras del tal modo que si estas últimas cambian también lo hacen las primeras, entonces las primeras cantidades se llaman funciones de las segundas.

Pero la cosa seguía sin estar clara del todo: ¿cómo es esa dependencia?, ¿cómo expresarla, calcularla o representarla?, ¿cómo deben cambiar los valores de las variables?, ¿cuántas variables pueden intervenir?, ...

Muchos matemáticos abordaron el problema de dar una definición precisa y adecuada de función. Y así se pasaron casi dos siglos, puliendo poco a poco el concepto, hasta que, ya en el siglo XX, Edouard Goursat dio en 1923 la definición que aparece en la mayoría de los libros de textos hoy en día:

***Se dice que* y *es una función de* x *si a cada valor de* x *le corresponde un único valor de* y.**

***Esta correspondencia se indica mediante la ecuación* y = *f*(x)**

ACTIVIDADES

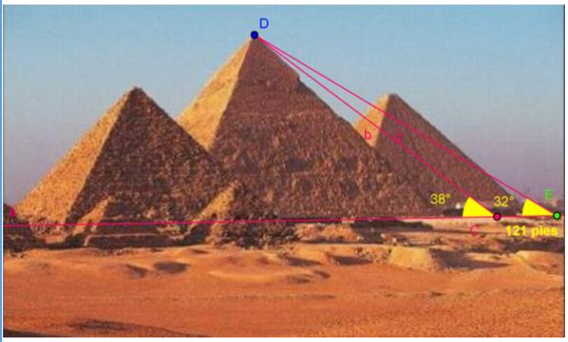
1. *Realiza un eje cronológico del desarrollo histórico de las funciones*
2. *Indica ejemplos de funciones que conozcas*
3. *Busca en tu libro de texto funciones nuevas que vas a estudiar este curso*
4. *Escribe las distintas definiciones de función que aparecen en el texto. Compáralas. ¿Cuál crees que es la más sencilla? ¿Cuál entiendes mejor?*

HISTORIA DE LA TRIGONOMETRÍA

Los avances de las Matemáticas no han sido fruto del trabajo de una persona sino de la aportación de muchos matemáticos y de varias civilizaciones. La trigonometría que nosotros estudiamos en un poco tiempo tardó en desarrollarse muchos siglos hasta llegar a su forma actual. Vamos a analizar aquí un poco de su historia y de las aportaciones que a ella han hecho algunas civilizaciones y algunos matemáticos.

SIGLO X a.C.

Hace más de 3.000 años, ya se comenzó a usar la trigonometría en las civilizaciones egipcia y babilónica. En Babilonia se usaba para realizar medidas en la agricultura, y en el Antiguo Egipto se utilizó además en la construcción de las pirámides.



También fue aplicada a los primeros estudios de astronomía, en la realización de calendarios y el cálculo del tiempo, y en la navegación. Los egipcios fueron los que establecieron el sistema sexagesimal, midiendo los ángulos en grados, minutos y segundos.

En el Antiguo Egipto (sobre el año 2700 a.C. hasta el 2200 a.C.) se alcanza un notable desarrollo en la aritmética y la geometría, por la necesidad de calcular correctamente la superficie de los campos tras la inundación anual. También sabían calcular volúmenes, como el de la pirámide y el tronco de pirámide. La construcción de los monumentos de esta época implica amplios conocimientos de estas ciencias.

SIGLO II a.C.

Los conocimientos de los pueblos anteriores pasaron a Grecia, donde continuó su desarrollo. Allí, el matemático y astrónomo Hiparco de Nicea que vivió aproximadamente entre los años 190 y 120 a.C. fue el padre de la trigonometría. Hiparco construyó una tabla de cuerdas, que equivale a la moderna tabla de senos. Con la ayuda de dicha tabla, pudo fácilmente relacionar los lados y los ángulos de todo triángulo plano.

SIGLO II

Pasan casi 300 años, para que otro matemático y astrónomo griego continuara el trabajo de Hiparco, Claudio Ptolomeo (85-165 d.C.). Aunque de origen griego Ptolomeo vivió y trabajó en Alejandría y en Egipto. Creó una nueva tabla de cuerdas con un error menor que 1/3600, utilizando para ello una circunferencia de radio 60. Junto con la tabla explicaba cómo obtenerla e incluso da ejemplos sobre cómo usarla para resolver triángulos rectángulos. También aplicó sus teorías trigonométricas a la construcción de relojes de sol y de astrolabios.

En la India, paralelamente a los avances de la matemática griega, desarrollan un sistema trigonométrico basado en la función seno en vez de en cuerdas, la función seno no era concebida como una proporción tal y como la definimos ahora, sino como la longitud del cateto opuesto a un ángulo de un triángulo rectángulo. Así construyeron diversas tablas para la función seno.

SIGLO X

No podía faltar en el desarrollo de la trigonometría la civilización árabe. A partir del siglo VIII los matemáticos árabes continúan los trabajos de las civilizaciones griega e india. Adoptando el concepto de la función seno. Tal fueron sus avances que en el siglo X ya habían completado la función seno y las otras cinco razones trigonométricas: coseno, tangente, secante, cosecante y cotangente. A ellos se debe también el tomar como radio $r = 1$ en la circunferencia goniométrica para obtener las razones trigonométricas. Destacan también por la exactitud de sus cálculos, por ejemplo, la tabla con los valores del seno de un ángulo, obtenidas para grados y minutos tienen un error menor a $1{,}5 \cdot 10^{-8}$.

SIGLO XV

La trigonometría llega a occidente a partir del siglo XII y a través de la cultura árabe. Pero no es hasta el siglo XV cuando se realiza el primer trabajo importante sobre este tema. Fue el matemático alemán Johann Müller (1436-1476), conocido como Regiomontano, el que escribe las primeras obras sobre trigonometría, tan importantes que es considerado como un fundador de esta parte de las matemáticas. Su obra “De Triangulis Omnimodis”, está compuesta de cinco libros, en el primero da las definiciones básicas: cantidad, ratio, igualdad, círculos, arcos, cuerdas, y la función seno. Proporciona algunos axiomas que proporcionarán el sustento de los 56 teoremas que enunciará. En el segundo de los libros establece la Ley del seno y la emplea en la resolución de algunos problemas con triángulos. Determina el área de un triángulo mediante el conocimiento de dos lados y el ángulo que los sustenta. Los libros III, IV y V tratan de trigonometría esférica centrando el tema para las posteriores obras de astronomía.

SIGLO XVI

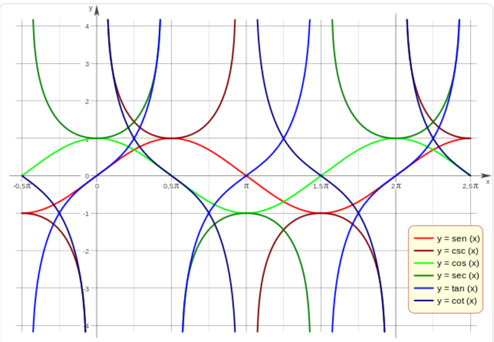
Georges Joachim, conocido como Rético (1514-1576), introdujo el concepto moderno de funciones trigonométricas como proporciones en vez de longitudes de ciertas líneas. En esa misma época, el matemático francés François Viète (1540-1603), introduce la trigonometría esférica.

SIGLO XVII

A principios de este siglo se produce un gran avance de los cálculos trigonométricos gracias al matemático escocés John Napier (1550-1617), inventor de los logaritmos que simplificaron notablemente el cálculo y que planteó diversos métodos para la resolución de triángulos esféricos.

SIGLO XVIII

Sir Isaac Newton (1643-1727), inventó el cálculo diferencial e integral, que permitió representar muchas funciones matemáticas, entre ellas las trigonométricas mediante potencias. Con la invención del Cálculo, la trigonometría pasa a formar parte del Análisis Matemático, donde hoy juega un papel fundamental.



Leonhard Euler (1707-1783), matemático suizo, fundó la trigonometría moderna, introdujo la notación actual de las funciones trigonométricas, popularizó el uso de la letra griega π, introdujo el uso de la función exponencial y descubrió su relación con las funciones trigonométricas, demostrando de una manera muy simple las propiedades básicas de la trigonometría.

ACTIVIDADES

1. *Busca el significado de las palabras del texto que no sepas lo que significan.*
2. *Realiza un pequeño “diccionario” de Trigonometría.*
3. *Haz un eje cronológico con los momentos principales de la historia de la trigonometría*
4. *Busca información sobre la antigua Mesopotamia. Sitúala en un mapa.*
5. *Haz un esquema las aplicaciones de la trigonometría que aparecen en el texto.*

LA PARADOJA DE LA ÍNSULA BARATARIA Y OTRAS PARADOJAS

En el tiempo que Sancho fue gobernador de la Ínsula Barataria tuvo que resolver interesantes situaciones y pleitos que le planteaban sus súbditos para que él hiciera justicia. Y asombró a todos con las atinadas decisiones y veredictos que adoptaba. Una de las más conocidas, al menos entre los matemáticos, es la paradoja que le exponen para que "resuelva" y que reproduzco a continuación entresacando del texto solo los párrafos que plantean y "resuelven" la paradoja:

Señor, un caudaloso río dividía dos términos de un mismo señorío (y esté vuestra merced atento, porque el caso es de importancia y algo dificultoso). Digo, pues, que sobre este río estaba una puente, y al cabo della, una horca y una como casa de audiencia, en la cual de ordinario había cuatro jueces que juzgaban la ley que puso el dueño del río, de la puente y del señorío, que era en esta forma: "Si alguno pasare por esta puente de una parte a otra, ha de jurar primero adónde y a qué va; y si jurare verdad, déjenle pasar; y si dijere mentira, muera por ello ahorcado en la horca que allí se muestra, sin remisión alguna". … Sucedió, pues, que, tomando juramento a un hombre, juró y dijo que para el juramento que hacía, que iba a morir en aquella horca que allí estaba, y no a otra cosa. Repararon los jueces en el juramento y dijeron: "Si a este hombre le dejamos pasar libremente, mintió en su juramento, y, conforme a la ley, debe morir; y si le ahorcamos, él juró que iba a morir en aquella horca, y, habiendo jurado verdad, por la misma ley debe ser libre.

(…)Él tiene la misma razón para morir que para vivir y pasar la puente; porque si la verdad le salva, la mentira le condena igualmente; y, siendo esto así, como lo es, soy de parecer que digáis a esos señores que a mí os enviaron que, pues están en un fil las razones de condenarle o asolverle, que le dejen pasar libremente, pues siempre es alabado más el hacer bien que mal, y esto lo diera firmado de mi nombre, si supiera firmar; y yo en este caso no he hablado de mío, sino que se me vino a la memoria un precepto, entre otros muchos que me dio mi amo don Quijote la noche antes que viniese a ser gobernador desta ínsula: que fue que, cuando la justicia estuviese en duda, me decantase y acogiese a la misericordia; y ha querido Dios que agora se me acordase, por venir en este caso como de molde.

Vemos que Sancho resuelve la situación acudiendo a un consejo dado por don Quijote que, obviamente, no "resuelve" la situación porque eso es imposible. El consejo no es otro que un principio jurídico que dice "in dubio pro reo".

Las paradojas han fascinado a la humanidad desde muy antiguo. El término procede del griego (para y doxos), que significa más allá de lo creíble. En ellas se plantea una situación de aparente coherencia pero que contiene contradicciones. Algunas son simples juegos de palabras (paradojas semánticas), pero otras poseen una profunda carga intelectual que incluso han abierto campos de investigación o han dado fundamento a enrevesadas ideas, como la del infinito. […]

Y precisamente el infinito también dio lugar a cuestiones inexplicables que fueron consideradas paradojas.

Por ejemplo: el conjunto de los números naturales es el formado por 1, 2, 3, 4, 5, 6, … y el de los pares es el formado por 2, 4, 6, 8, …Si preguntamos a cualquier persona no versada en estos asuntos que cuál de esos dos conjuntos tiene más elementos, lo normal es que diga que el primero tiene más elementos que el segundo pues eso es lo que le indica su lógica. En efecto, así lo dicta este principio: si podemos emparejar todos los elementos de un conjunto con todos los pertenecientes a otro conjunto, entonces ambos son iguales. Parece evidente que si en el segundo conjunto no está ni el 1 ni el 3 ni ninguno de los demás impares entonces el primero "debe" tener más elementos que el segundo. Pero fíjese ahora en lo que le presento escribiendo los números de esos conjuntos como lo hago a continuación:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10…
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20…

¿Mantiene la idea de que el conjunto de los naturales tiene más elementos que el de los pares cuando vemos cómo debajo de todo número natural podemos colocar el par correspondiente? Galileo Galilei (1564, 1642) observó algo parecido cuando vio que todo número natural tiene un cuadrado de forma que los podemos "emparejar" así:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10…
1	4	9	16	25	36	49	64	81	100…

[…] Otra conocida paradoja semántica es: la **Paradoja del cocodrilo y la mujer**. Se atribuye a los sofistas (siglo V a.C.). Dice así:

Un cocodrilo atrapa a un bebé en la margen del Nilo. La madre suplicó al animal que se lo devolviese, a lo que contestó el parlante cocodrilo:

– *Muy bien, si eres capaz de vaticinar lo que haré, te devolveré al niño. Pero si adivinas mal, lo devoraré.*

– *Devorarás a mi hijo, responde la madre.*

¿No parece un poco arriesgada la respuesta de la madre? ¿Son capaces los cocodrilos de pensar tanto como para darse cuenta de que la madre de la criatura le "ha metido en un callejón sin salida"? […] Una recomendación final: lea el Quijote si no lo ha leído completo nunca y si ya lo leyó, hágalo de nuevo porque siempre se descubren cosas y sabiduría nuevas. Muchas gracias.

Luis Balbuena Castellano.

Cervantes, Don Quijote y las Matemáticas.

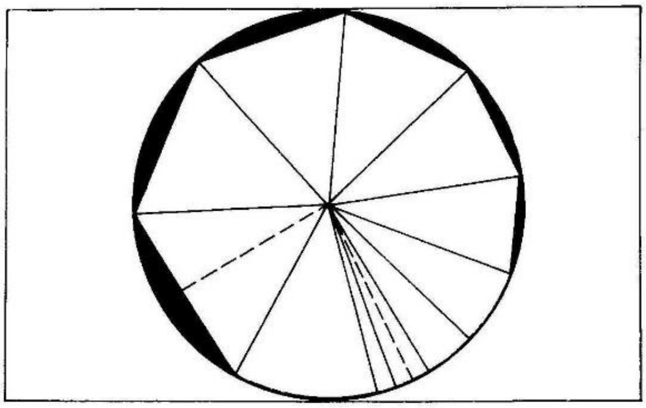
ACTIVIDADES

1. *Encuentra cinco palabras pertenecientes al castellano antiguo que aparecen en el fragmento que hace referencia a la paradoja de la Ínsula Barataria y tradúcelas a nuestro castellano.*
2. *Explica qué es una paradoja.*
3. *Explica en qué consiste la primera paradoja que aparece en la lectura: la paradoja de la Ínsula Barataria.*
4. *Escribe otro ejemplo como el que se describe de Galileo.*
5. *Investiga y describe otra paradoja que no aparezca en el texto.*

PASO AL LÍMITE: ANTECEDENTES. EL MÉTODO EXHAUSTIVO

Ya en la Grecia Clásica se plantearon problemas que tenían que ver con el manejo de infinitas cantidades "infinitamente próximas" a un número.

Para poder calcular el área de un círculo, los Pitagóricos (s. V a.C.) consideraron a éste como una suma de un número infinito de triángulos infinitamente estrechos, colocados alrededor del círculo de tal manera que su altura se aproxima más al radio cuanto más se reduce la base de dichos triángulos. Al observar que la altura de cada triángulo pasaba a ser el radio del círculo y que la suma de las bases igualaba a la circunferencia, aplicaron como fórmula la siguiente:

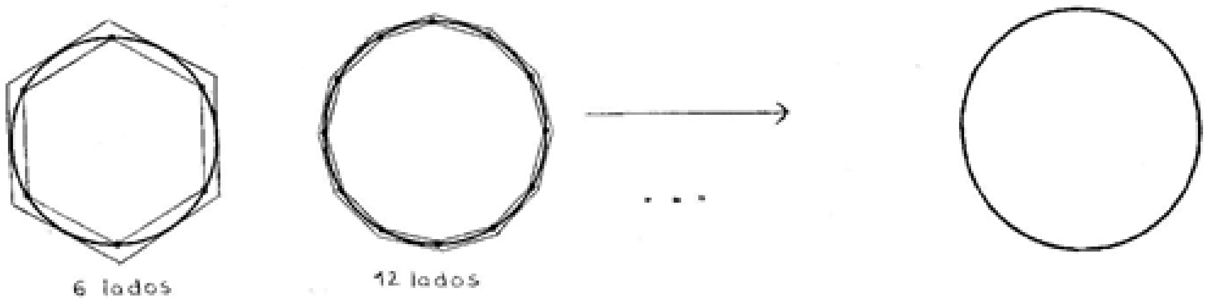


área del círculo = ½ • longitud circunferencia • radio

Un siglo después, la Escuela Eleática (de la ciudad de Elea) objetó: Si los triángulos se estrechan infinitamente, en algún momento dejan de ser triángulos; entonces ya no son algo, sino nada. ¿Cómo una suma de nadas puede producir algo?

El más famoso filósofo eleático, Zenón, planteó la célebre Paradoja de Aquiles y la Tortuga, que con razonamientos parecidos negaba que pudiera existir el movimiento.

Arquímedes de Siracusa (287 a 212 a C.) calculó la longitud de la circunferencia así: comenzó con dos hexágonos regulares, inscrito y circunscrito en una circunferencia y calculó sus perímetros. La circunferencia mide un número comprendido entre ellos. Después duplicó el número de lados, obteniendo dos dodecágonos. Ahora la circunferencia se acerca aún más a los dos perímetros, estando entre ambos. Y siguió así, duplicando el número de lados hasta llegar a 96.



De este modo consiguió aproximar mucho la longitud de la circunferencia. Y aplicó métodos análogos para longitudes y áreas con otras curvas. A esta forma de razonar por aproximaciones sucesivas se le llamó método exhaustivo.

Este método volvía a ser utilizado en el s. XVII para aproximar números irracionales. Por ejemplo:

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ldots}}}}$$

Y para el famoso "número de oro",

$$\Phi: \qquad \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ldots}}}}$$

Se cuenta que Kepler también utilizó el método exhaustivo para calcular el volumen de toneles de vino (técnica llamada doliometría), aproximándolo mediante cilindros y troncos de conos. Y que lo hizo para resolver un problema práctico que se le había sido planteado organizando el banquete de la boda con su segunda esposa: ¿cuál es la forma de un tonel que permite almacenar un mayor volumen, con la misma superficie (madera)?

José María Sorando Muzás.

Sobre hombros de gigantes. Matemáticas e Historia.

http://catedu.es/matematicas_mundo

ACTIVIDADES

1. *¿Qué es el método exhaustivo?*
2. *Explica cómo calculó Arquímedes la longitud de la circunferencia utilizando dicho método.*
3. *Indica si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Corrige las que no sean correctas:*
    a. *Zenón planteó la paradoja de Aquiles y la Tortuga.*
    b. *El método exhaustivo se utilizó en el siglo catorce para aproximar números irracionales.*
    c. *Los pitagóricos consideraban el área del círculo como una suma de un número infinito de círculos infinitamente pequeños.*
4. *¿Qué números irracionales se citan en el texto? ¿Por qué son números irracionales?*
5. *Fue Arquímedes el primero que científicamente calculó el número π por aproximaciones sucesivas utilizando el método descrito en la lectura.*
6. *¿Cuál es el origen del nombre del número Pi?*

CRIPTOGRAFÍA Y MATEMÁTICAS

La Real Academia de la Lengua define la criptografía como “el arte de escribir con clave secreta o de un modo enigmático”, y ciertamente es una definición acertada, pues la criptografía se considera actualmente como la ciencia dedicada a estudiar métodos para codificar (cifrar o encriptar) mensajes secretos; evidentemente el objetivo último de la criptografía es la imposibilidad, por parte de cualquier persona ajena al mensaje, de descifrar un mensaje codificado, pues hay que contar siempre con la existencia gratuita de un adversario, que pondrá todos los medios posibles a su alcance para descifrar los mensajes secretos. A la ciencia que estudia los métodos que permiten descifrar mensajes encriptados se le conoce como criptoanálisis, y a la unión de ambas ciencias se le ha denominado criptología. Aunque actualmente la criptografía basa todos sus métodos en la teoría de números, la estadística y distintas teorías de la información, la criptografía se originó en el mismo momento en que apareció la escritura. Siempre han existido situaciones en las que el hombre ha necesitado comunicar mensajes de vital importancia a sus semejantes, intentado que sus enemigos no los conocieran, ya que estos mensajes solían estar referidos a las estrategias militares que pudieran usar.

[…] La utilización de métodos criptográficos de cierta importancia se remonta a 400 años a. C., en Esparta, donde los espartanos usaban un sistema secreto de escritura durante los enfrentamientos con Atenas. Este sistema de codificación de mensajes consistía en algo tan simple como lo siguiente: el emisor del mensaje y el receptor de éste poseían, cada uno, cilindros idénticos con bases de igual radio, el emisor enrollaba una tira de papel en el cilindro como si de una venda se tratara, y una vez enrollada escribía el mensaje a lo largo del cilindro; una vez escrito el mensaje original, se desenrollaba la tira de papel, quedando un mensaje aparentemente caótico que se mandaba al receptor, única persona capaz de descifrar el mensaje a menos que el cilindro fuera robado, único método que puede aportar el criptoanálisis. Los historiadores griegos denominaban a este método *la scitala espartana*.

En el siglo II a. C, el historiador griego Polibio, miembro de la Liga Aquea cuando era dirigida por Filipémenes y que fue derrotada por los romanos, usaba un sistema de encriptación y desencriptación muy original y que comunicaba a través de nueve antorchas.
Concretamente su método consistía en insertar el alfabeto en una tabla de doble de entrada de cinco filas y cuatro columnas asignando a cada letra el número formado por el número de la fila y el número de la columna en la que la letra estaba situada, como si de coordenadas se tratara. Teniendo en cuenta que el alfabeto romano constaba de veintiuna letras, la I se agruparía junto con la K, y la tabla quedaría así:

	1	2	3	4
1	A	B	C	D
2	E	F	G	H
3	I/K	L	M	N
4	O	P	Q	R
5	S	T	V	X

(Se elegirá I o K según el contexto)

De esta forma al corresponderse la letra T con el número 52, ésta se comunicaría encendiendo las cinco primeras antorchas y las dos últimas. Este método, conocido como *cuadrado de Polibio*, tiene variaciones que hacen de él un buen método, pues a diferencia de lo que ocurre con los cifrarios mono-alfabéticos de sustitución, que analizaremos a continuación, altera la frecuencia de los caracteres.

[…] En el siglo I a. C. el general romano Julio César creó un sistema de encriptación muy simple, consistente en sustituir unas letras por otras. Más concretamente, la sustitución que Julio César utilizó consistía en asignar a cada letra del alfabeto la letra que estaba tres lugares más a su derecha, adoptando el criterio lógico de que tras la letra Z se empezaba de nuevo por la letra A. La clave de encriptación del conocido como *Cifrario de César* es por tanto el número "3". Teniendo en cuenta que el alfabeto romano sólo tenía veintiuna letras, el cifrario de César se basa en la siguiente sustitución de letras:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	V	X
D	E	F	G	H	I	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	V	X	A	B	C

La primera línea es el alfabeto sin cifrar y la segunda línea es el alfabeto de cifrado. Así por ejemplo, la frase ALEA IACTA EST *(la suerte está echada)*, que Julio César usó en el 49 a. C. cuando decidió atravesar el Rubicón con sus legiones, utilizando su cifrario se convierte en: DOHD MDFAD HXA. Evidentemente, el cifrario de Julio César es uno de los 20 cifrarios que se pueden hacer de este tipo, basta con ir rotando el alfabeto de la línea de cifrado (la segunda línea). […]

Juan José Ortiz Muñoz.
Revista Suma (Junio 2009)

ACTIVIDADES

1. *Realiza un resumen del texto.*
2. *Contesta:*
   a. *¿Qué es el criptoanálisis?*
   b. *¿Cuándo se utilizó por primera vez métodos criptográficos de cierta importancia?*
3. *Indica si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Corrige las que no sean correctas:*
   a. *Actualmente la criptografía basa todos sus métodos en la teoría de números, la estadística y distintas teorías de la información.*
   b. *La criptografía se originó muchísimos siglos después que la escritura.*
   c. *El alfabeto romano constaba de veinticinco letras.*
4. *Utilizando el Cifrario de César, descodifica el siguiente mensaje:*
   OD PDAHPDAMFD HX OODBH Y SBHVAD GH OD FMHQFMD.
5. *La clave de encriptación del Cifrario de César era el número "3". Construye un cifrario del mismo tipo con clave el número "7".*

LA HABITACIÓN DE FERMAT

La película comienza con un fundido en negro y la voz de uno de los protagonistas (Alejo Sauras) que advierte directamente al espectador: *"¿Sabéis lo que son los números primos? Si no lo sabéis, mejor que os vayáis de aquí.*" Vemos entonces a un joven, al parecer famoso, rodeado por varias chicas que coquetean con él. Les explica el enunciado de la conjetura de Goldbach. […] Y les pone varios ejemplos:

18 = 7 + 11 24 = 5 + 19 100 = 83 + 17

[…] Se trata de un estudiante de matemáticas de 21 años que está de moda al afirmar haber encontrado una demostración a dicha conjetura, a la que define como "el problema más difícil de la historia de las matemáticas". […] La primera sorpresa es que, días antes de llegar la fecha a la que va a comunicar al mundo su sublime descubrimiento, asaltan su cuarto, revuelven todo y le roban tal demostración, lo cual parece desesperarle bastante. […] Cuatro meses después nos encontramos a otro matemático jugando al ajedrez con su médico, que parece preocupado por su salud. Éste comenta su afición a los enigmas, preguntándole: *¿Qué tienen en común Georg Cantor, Yutaka Taniyama y Kurt Gödel?* El matemático, quizá algo desconcertado al comprobar que su amigo conoce nombres muy específicos, responde algo obvio: los tres fueron eminentes matemáticos, de gran inteligencia. Pero los tiros iban por otro lado: los tres enloquecieron y se suicidaron. El matemático reconoce entonces haber pensado alguna vez en ello. Tanto el joven como este último han recibido una carta-invitación a una atrayente velada en la que se anuncia que tendrá lugar un gran descubrimiento. Pero sólo pueden asistir aquellos que sean capaces de resolver la siguiente cuestión: *¿Qué patrón sigue la siguiente secuencia de números 5 – 4 – 2 – 9 – 8 – 6 – 7 – 3 – 1?*

Conocemos al tercer protagonista a través de la resolución de este acertijo. Se trata de un hombre de mediana edad, al parecer también matemático, aunque menos lúcido que los otros dos ya que no logra resolver satisfactoriamente la cuestión hasta el último momento y de manera un tanto casual. Lo hace en una biblioteca, rodeado de libros, dando la impresión de haber estado buscando esa cuestión u otra similar escrita en alguna parte. Eso un matemático rara vez lo hará, siempre intentará resolverlo por sí mismo, salvo que esté ya muy desesperado y le interese mucho asistir a la reunión. Reunión, por cierto a la que convoca un tal Fermat. […] Diez días después cuatro personas son citadas en un lugar apartado en el campo, al pie de un embalse. El primero en llegar será precisamente el último del que hemos hablado, al que el misterioso Fermat ha rebautizado con el nombre de Pascal. Al poco aparece un motorista, una mujer, cuyo seudónimo será el de Oliva, y de primeras algo distante. Por el camino, los otros dos protagonistas que ya conocemos (nombrados por el enigmático Fermat como Galois, el joven y Hilbert, el mayor), se han encontrado y presentado entre ellos, al averiarse el automóvil del segundo. […] Reunidos los cuatro, a la hora exacta reciben una señal luminosa de un coche en la otra orilla del lago. Sin mayores dificultades descubren cómo acceder allí: remando y gracias a "Pitágoras". Hilbert apunta que la situación le recuerda al famoso problema en el que un pastor, un lobo, una oveja y una col deben pasar al otro lado de un río, pero sólo pueden hacerlo de dos en dos, y que nunca pueden coincidir ni en las orillas ni en la barca lobo y oveja, ni oveja y col. […]

Ya de noche llegan al lugar, un viejo almacén de grano.[…] Después de asentarse y lucubrar sobre el misterioso Fermat, éste aparece.

[…] En la charla posterior, Fermat pregunta a los demás qué les gustaría poder hacer. A Oliva (y posteriormente Galois, que no pierde ocasión de intentar ligarse a cualquier cosa con faldas) poder volar, mientras que Hilbert responde que ser invisible. Al poco, Fermat recibe una llamada en su teléfono móvil[…] y expone las razones por las que debe ausentarse de inmediato de la reunión. Al poco de irse, los cuatro protagonistas se quedan encerrados en la habitación, y para sobrevivir deben resolver una serie de enigmas que les son planteados a través de una PDA. Si fallan o responden en un tiempo superior al asignado, las paredes comienzan a moverse estrechándose. Y según su estimación, en menos de una hora. A la vez, se preguntan las razones por las que Fermat se ha comportado así, precisamente con ellos. […] Hacia el final de la película, Fermat realiza su único comentario relacionado con las matemáticas. Conduce un coche y no lleva puesto el cinturón de seguridad. Un policía lo acompaña haciendo la siguiente observación: "*El 28% de los conductores muere por no llevar puesto el cinturón de seguridad*". Fermat responde sonriendo, "*o sea que el 72% restante muere con el cinturón puesto*", comentario que no hace ni pizca de gracia al agente, aunque su apreciación no puede resultar más profética.

Alfonso J. Población Sáez.
Real Sociedad Matemática Española.
http://www.divulgamat.net

ACTIVIDADES

1. *Realiza un resumen del texto.*

2. *Busca en el diccionario los siguientes términos:*

Conjetura

Profética

Lucubrar

3. *Escribe los nombres de todos los matemáticos que aparecen en el texto.*

4. *Con ayuda de los ejemplos de la conjetura de Goldbach que aparecen en la lectura, indica el enunciado correcto de dicha conjetura:*

a) Todo número mayor que 2 puede escribirse como suma de dos números primos.

b) Todo número par mayor que 2 puede escribirse como suma de dos números primos.

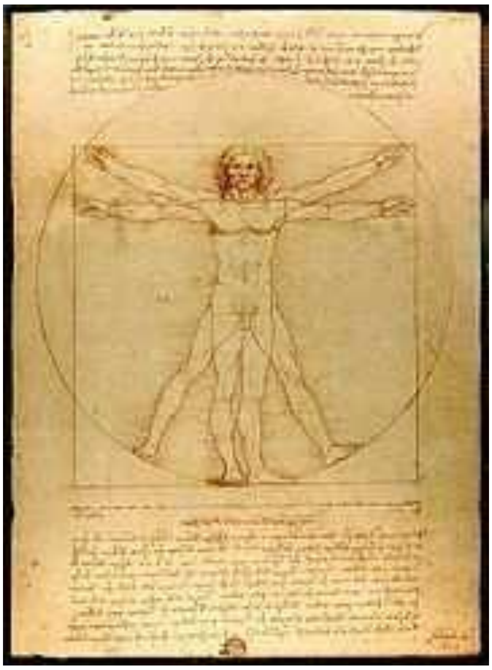
c) Todo número par puede escribirse como suma de dos números primos.

5. *a) Para asistir a la reunión, los protagonistas han de resolver un acertijo. ¿Eres capaz de resolverlo tú?*

b) Intenta resolver el problema del pastor, el lobo, la oveja y la col.

EL HOMBRE DE VITRUVIO

El Hombre de Vitruvio es un famoso dibujo acompañado de notas anatómicas de Leonardo da Vinci realizado alrededor del año 1492 en uno de sus diarios. Representa una figura masculina desnuda en dos posiciones sobreimpresas de brazos y piernas e inscrita en un círculo y un cuadrado. Se trata de un estudio de las proporciones del cuerpo humano, realizado a partir de los textos de arquitectura de Vitruvio, arquitecto de la antigua Roma, del cual el dibujo toma su nombre. También se conoce como el Canon de las proporciones humanas.



Análisis del dibujo

El dibujo está realizado en lápiz y tinta y mide 34,2 x 24,5 cm. En la actualidad forma parte de la colección de la Galería de la Academia de Venecia. El cuadrado está centrado en los genitales, y el círculo en el ombligo. La relación entre el lado del cuadrado y el radio del círculo es la razón áurea. Para Vitruvio el cuerpo humano está dividido en dos mitades por los órganos sexuales, mientras que el ombligo determina la sección áurea. En el recién nacido, el ombligo ocupa una posición media y con el crecimiento migra hasta su posición definitiva en el adulto.

De acuerdo con las notas del propio Leonardo en el Hombre de Vitruvio se dan otras relaciones:

- Una palma equivale al ancho de cuatro dedos.
- Un pie equivale al ancho de cuatro palmas (12 pulgadas).
- Un antebrazo equivale al ancho de seis palmas.
- La altura de un hombre son cuatro antebrazos (24 palmas).
- Un paso es igual a un antebrazo.

- La longitud de los brazos extendidos (envergadura) de un hombre es igual a su altura.
- La distancia entre el nacimiento del pelo y la barbilla es un décimo de la altura de un hombre.
- La altura de la cabeza hasta la barbilla es un octavo de la altura de un hombre.
- La distancia entre el nacimiento del pelo a la parte superior del pecho es un séptimo de la altura de un hombre.
- La altura de la cabeza hasta el final de las costillas es un cuarto de la altura de un hombre.
- La anchura máxima de los hombros es un cuarto de la altura de un hombre.
- La distancia del codo al extremo de la mano es un quinto de la altura de un hombre.
- La distancia del codo a la axila es un octavo de la altura de un hombre.
- La longitud de la mano es un décimo de la altura de un hombre.
- La distancia de la barbilla a la nariz es un tercio de la longitud de la cara.
- La distancia entre el nacimiento del pelo y las cejas es un tercio de la longitud de la cara.
- La altura de la oreja es un tercio de la longitud de la cara.
- La distancia desde la planta del pie hasta debajo de la rodilla es la cuarta parte del hombre.
- La distancia desde debajo de la rodilla hasta el inicio de los genitales es la cuarta parte del hombre.
- El inicio de los genitales marca la mitad de la altura del hombre..

El redescubrimiento de las proporciones matemáticas del cuerpo humano en el siglo XV por Leonardo y otros autores, está considerado uno de los grandes logros del Renacimiento.

El dibujo también es a menudo considerado como un símbolo de la simetría básica del cuerpo humano y, por extensión, del universo en su conjunto.

Examinando el dibujo puede notarse que la combinación de las posiciones de los brazos y piernas crea realmente dieciséis posiciones distintas. La posición con los brazos en cruz y los pies juntos se ve inscrita en el cuadrado sobreimpreso. Por otra parte, la posición superior de los brazos y las dos de las piernas se ve inscrita en el círculo sobreimpreso. Esto ilustra el principio de que en el cambio entre las dos posiciones, el centro aparente de la figura parece moverse, pero en realidad el ombligo de la figura, que es el centro de gravedad verdadero, permanece inmóvil.

Este dibujo aparece en el reverso de la moneda de euro de Italia.

ACTIVIDADES

1. *¿Qué otro nombre recibe el "Hombre de Vitruvio"?*

2. *Según el autor, ¿qué representa el ombligo?*

3. *¿Cuál es la finalidad del dibujo?*

4. *¿Qué se entiende por "razón áurea"?*

5. *¿A cuántos pasos equivale la altura de un hombre?*

6. *¿Al ancho de cuántos dedos equivale la distancia del codo a la axila?*

7. *¿Por qué crees que es tan importante el tratado de Leonardo Da Vinci sobre el hombre de Vitruvio?*

PROPORCIONALIDAD Y ELECCIONES

Cada vez que se celebran unas Elecciones, tras el recuento de votos hay que repartir los puestos de representación entre las diferentes candidaturas presentadas. Estos puestos se llaman escaños en las Elecciones Generales o Autonómicas; y concejalías en las Elecciones Municipales. La Constitución Española establece que ***la representación debe ser proporcional al número de votos*** obtenido por cada candidatura, de modo que a mayor número de votos conseguidos, deberá corresponder mayor número de escaños. Llevar esto a la práctica no es tan sencillo como pueda parecer a primera vista y, como vas a ver, frecuentemente desata polémicas entre opiniones e intereses enfrentados.

REPARTO DIRECTAMENTE PROPORCIONAL

Si se considera que "a doble número de votos debería corresponder doble número de escaños", "a triple, triple", etc., habría que realizar un reparto directamente proporcional. Ejemplo: Hay que repartir 6 escaños entre 5 partidos políticos, cuyos votos han sido los siguientes

	Partido A	Partido B	Partido C	Partido D	Partido E	Total
Votos	95.000	25.000	45.000	60.000	10.000	235.000
Escaños	x	y	z	t	u	6

Aplicando la proporcionalidad directa: x = 95.000 · 6 / 235.000 = 2,43 escaños; y = 25.000 · 6 / 235.000 = 0,64 escaños,... etc., resultando:

	Partido A	Partido B	Partido C	Partido D	Partido E	Total
Escaños	2,43	0,64	1,15	1,53	0,26	6,01

Se aprecia en el total un error de redondeo de 0,01. Pero además ésta no es una solución aplicable, pues los números de escaños obviamente deben ser números naturales. ¿Cómo asignar a cada partido un número natural que haga justicia con sus resultados en las urnas?. Veremos dos métodos, pero debes saber que se han propuesto muchos más. Es un tema importante, pues un solo escaño ¡puede decidir quién gobierna un país!.

REGLA DE D´HONDT

D´Hondt, matemático belga, inventó una regla de proporcionalidad para distribuir escaños tras unas votaciones. Consiste en dividir los resultados de cada partido por los números 1 , 2 , 3, ... hasta alcanzar el número de escaños a repartir (en el ejemplo, 6) y después elegir los números mayores, hasta tener tantos representantes como escaños. En el ejemplo, están sombreados los seis cocientes mayores:

Dividir por	Partido A	Partido B	Partido C	Partido D	Partido E
Uno	95.000	25.000	45.000	60.000	10.000
Dos	47.500	12.500	22.500	30.000	5.000
Tres	31.667	8.333	15.000	20.000	3.333
Cuatro	23.750	6.250	11.750	15.000	2.500
Cinco	19.000	5.000	9.000	12.000	2.000
Seis	15.833	4.167	7.500	10.000	1.666

La asignación de los diputados se hace del siguiente modo:

1º: Partido A….95.000; 2º: Partido D ....60.000; 3º: Partido A ....47.500; 4º: Partido C ....45.000, 5º: Partido A ....31.667; 6º: Partido D 30.000

	Partido A	Partido B	Partido C	Partido D	Partido E	Total
Escaños	3	0	1	2	0	6

Fíjate: Al Partido A cada escaño "le ha costado" ... 95.000 : 3 = 31.667 votos; al Partido C su escaño "le ha costado" ... 45.000 votos; al Partido D cada escaño "le ha costado" ... 60.000 : 2 = 30.000 votos; Como habrás visto, el escaño del Partido C ha salido "más caro" que los demás.

Calculamos ahora la diferencia entre el reparto según D´Hondt y el reparto directamente proporcional:

Partido A: 3 - 2,43 = + 0,57 Partido B: 0 - 0,64 = - 0,64 Partido C: 1 - 1,15 = - 0,15
Partido D: 2 - 1,53 = + 0,47 Partido E: 0 - 0,26 = - 0,26

Observarás que los partidos más votados, A y D, salen beneficiados. Los partidos menos votados, B, C y E, salen perjudicados.

La Regla de D´Hondt beneficia a los partidos más votados. Es el método vigente en España.

ACTIVIDADES

En las Elecciones Generales al Congreso de los Diputados, la provincia de Zaragoza reparte 7 escaños. En las elecciones del año 1996, estos fueron los resultados de los cuatro partidos más votados:

	PP	*PSOE*	*IU*	*CHA*
% de votos	*48,3*	*31,8*	*10,08*	*7,98*

1. *¿Cómo habrían quedado distribuidos los escaños si se hubiera aplicado la proporcionalidad directa?.*

2. *En la práctica, se aplicó la Regla de D´Hondt. ¿Cuál fue el resultado final del reparto?.¿Cuántos votos "le costó" a cada partido sus escaños?.*

3. *Calcula para cada partido la diferencia entre los escaños teóricos según reparto directamente proporcional y los escaños reales según D´Hondt.*

4. *¿Qué partidos obtienen "regalo"?. ¿Cuáles salen perjudicados?.*

5. *Expresa tu opinión sobre todo lo anterior.*

EMMY NOETHER, LA MUJER QUE REVOLUCIONÓ LAS MATEMÁTICAS

Emmy Noether es la madre del álgebra que, con sus revolucionarias ideas, marcó una época y que lograron convertirla en la mujer más importante de la historia de las matemáticas. La consideraba así incluso el mismísimo Albert Einstein, que llegó a decir de ella que había sido «la genio creativa de las matemáticas más significativa desde que comenzó la educación superior para las mujeres».

El 23 de marzo de 2015 se celebró, precisamente, el 133 aniversario del nacimiento de Emmy Noether en la ciudad bávara de Erlangen en 1882. La matemática vino al mundo en el seno de una familia judía, hija de un importante matemático y fue criada un ambiente doméstico especialmente volcado en la erudición científica; no en vano también sus dos hermanos se convirtieron en científicos. Aunque ni ellos ni su progenitor estuvieron nunca a la altura de Emmy, que logró superarlos a todos e inscribirse, de esta forma, en todos los libros de la historia de esta rama del conocimiento científico.

En principio, Emmy Noether creía que su vocación era la enseñanza de inglés y francés y estudió, entre 1900 y 1902, matemáticas e idiomas en Erlangen, donde en una clase de cientos de hombres solo ella y otra compañera eran mujeres. Al año siguiente, en 1903, se especializó en matemáticas en la Universidad de Göttingen. Era, en ambas instituciones, una oyente no matriculada, porque a las mujeres, por aquel entonces, no les estaba permitido acudir a las clases como estudiantes normales. Pero en 1904 sí le permitieron hacer la matrícula en Erlangen y tres años después conseguía, como corresponde a alguien de su calidad intelectual, el doctorado con mención *summa cum laude*.

Durante siete años, logró trabajar dando clases en la propia universidad de Erlangen, normalmente como sustituta de su propio padre, docente en la institución. Durante todo ese tiempo, Emmy Noether no recibió sueldo alguno.

Una original forma de acercarse a los problemas

Emmy Noether es conocida sobre todo por sus profundos y bellos teoremas sobre las teorías de anillos, cuerpos y álgebras, donde llegó a constituir una verdadera revolución. La matemática bávara consiguió desarrollar un teorema homónimo que, aunque con un profundo efecto mayoritariamente sobre la física, es especialmente importante en el campo de las matemáticas por ser uno de los que iniciaron el campo del álgebra abstracta, distinta por completo al álgebra antigua en que no estudia tanto los resultados de las operaciones, sino sus propiedades formales y relaciones.

Y entre los mayores hitos de Emmy Noether está el cambio, la revolución, de la forma en que los matemáticos pensaban sobre su objeto de estudio. La matemática fue reconocida por su fuerte propensión para el pensamiento abstracto, que le permitía acercarse a los problemas matemáticos de una forma original. De esta forma, la prominente bávara enseñó «a pensar en términos simples y, de la misma forma, generales [?] y no en complicados cálculos algebraicos», una nueva forma de actuar que fue capaz de sacar a la luz nuevos patrones algebraicos que habían estado ocultos durante mucho tiempo, según explicaba en un homenaje tras su muerte su colega de profesión P. S. Alexandroff.

Un valor y franqueza que no gustaba a los nazis

Pero a veces, mirando atrás a la historia, parecería que el mundo no está hecho para los genios. Y a Emmy Noether le pasó lo que a muchos otros dotados de una brillantez intelectual semejante. Durante muchos años, las universidades alemanas ningunearon a la reconocida matemática y hubo un tiempo en el que no era bienvenida ni siquiera para dar clases ni conferencias bajo su propio nombre.

Su colega Hermann Weyl, que siempre la apoyó y reconoció su valioso trabajo, diría años después que incluso los nazis habían impedido que diese conferencias, ya que «su valor, su franqueza, su despreocupación sobre su propio destino, su espíritu conciliador, en medio de todo el odio y la mezquindad, de la falta de esperanza y la tristeza, suponía un consuelo moral». Fue precisamente este matemático el que consiguió ofrecerle a Emmy Noether una beca para el Bryn Mawr College, en el estado Pensilvania, en Estados Unidos, a donde emigró en 1933, como tantos otros grandes científicos judíos alemanes, para escapar de la presión y de las políticas que comenzaban a implantar los nazis en Alemania.

El régimen de Hitler dejó bien claras sus intenciones nada más llegar al poder al echar a los judíos de la universidad. Y esa medida afectaba a Emmy Noether.

Emmy Noether escribió unos 45 trabajos de investigación y fue la inspiración de otros grandes nombres de las matemáticas como Max Deuring, Hans Fitting, Chiungtze Tsen o Olga Taussky Todd, entre otros.

La famosa matemática murió solo dos años después de comenzar una nueva vida en Estados Unidos, cuando en 1935, después de que le extrajesen un quiste ovárico. Falleció por una infección postoperatoria cuatro días después de la intervención.

Doodle de Google el 23 de marzo de 2015, homenaje al nacimiento de Emmy Noether

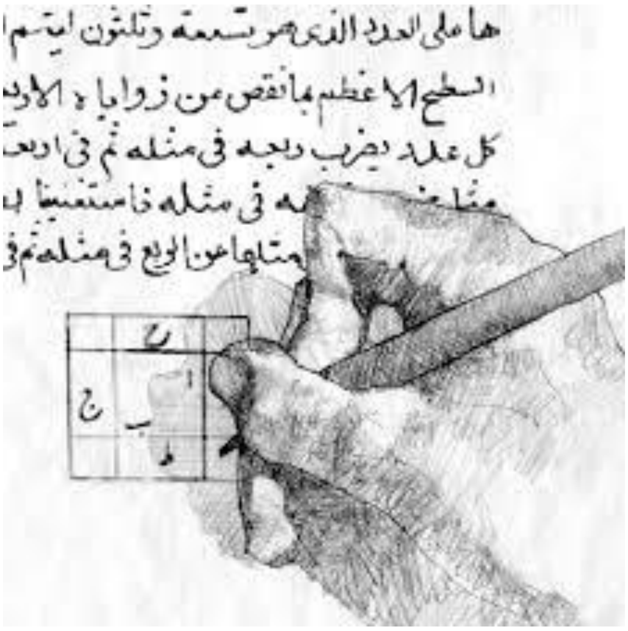
ACTIVIDADES

1. *Busca en un diccionario las palabras cuyo significado no conoces*
2. *Describe el ambiente familiar en el que creció Emmy Noether.*
3. *¿Qué significa que en la universidad fuese una "oyente no matriculada"? ¿Por qué crees que ocurría esto?*
4. *¿Cuál es la principal cualidad de esta matemática, según el texto?*
5. *¿Por qué tuvo que emigrar a Estados Unidos?*

MATEMÁTICAS CON SEDE ANDALUZA

Las matemáticas constituyen una de las ciencias más antiguas. Ya en los albores de la historia, el hombre las utilizaba ante las necesidades de la vida diaria, por ejemplo, para saber cuántas cabezas de ganado formaba su rebaño. Estos conocimientos rudimentarios que nacieron ligados a los problemas cotidianos terminaron por convertirse en Ciencia y contaron con representantes tan destacados como Tales de Mileto, considerado el primer científico por sus contribuciones astronómicas y matemáticas.

A lo largo de la historia, Andalucía ha sido un ejemplo de hombres que desde las matemáticas han elevado la ciencia de Al-Ándalus a una de las más productivas de la Humanidad. Por ejemplo, en la España musulmana, tuvieron gran difusión las obras de álgebra, como las de Al-Khwarizmi, pero sobre todo a través de la obra de Abulcasim Masmala, considerado el matemático más importante de la Edad Media europea, que tradujo la obra de Ptolomeo y corrigió y editó las tablas astronómicas de Al-Khwarizmi, adaptándolas al meridiano de Córdoba. Al-Ándalus contó también con otros matemáticos insignes como Ban-Ismail, conocido como el Euclides español.



Hoy, los científicos de nuestras universidades y centros de investigación recogen el legado de estos matemáticos históricos con investigaciones que convierten a esta Ciencia en su ámbito de estudio. Andalucía cuenta hoy con científicos que utilizan las matemáticas para predecir el comportamiento de una célula y programarla para que realice una función distinta, o saber si un tumor se va a extender y hasta dónde, para definir la distribución de la denominada materia oscura en el Universo o para conocer más al flamenco a través de sus compases, incluso los investigadores de humanidades las utilizan en sus estudios.

Las matemáticas se convierten, por tanto, en el lenguaje en que están escritas todas las ciencias. No obstante, Andalucía cuenta con científicos dedicados expresamente a esa disciplina. Para ellos, las matemáticas no sólo son un resorte para la investigación, sino que se convierten en la propia investigación. En este sentido, la matemática andaluza ha demostrado su excelencia a nivel nacional e internacional. Muestra de ello son los proyectos I + D + i (Investigación, Desarrollo e Innovación) concedidos por el Ministerio de Ciencia e Innovación a los grupos dedicados a esta área de conocimiento.

El potencial matemático andaluz quedará refrendado con la creación de una sede del Centro Nacional de Investigación en Matemáticas (IEMath). Granada se convertirá en una de las cuatro ciudades españolas donde se ubicará este centro, junto con Madrid, Barcelona y Santiago de Compostela.

IEMATH
INSTITUTO ESPAÑOL
DE MATEMÁTICAS

El proyecto cuenta con el respaldo de la Consejería de Innovación, Ciencia y Empresa de la Junta de Andalucía, de la

Universidad de Granada, en donde estará ubicado físicamente, y del CSIC (Consejo Superior de Investigaciones Científicas).

El IEMath nace con la misión de promover la excelencia en la investigación matemática, apoyando sus distintas disciplinas, favoreciendo la formación y facilitando la interrelación de la Matemática con otra áreas. Además, se esforzará en difundir y divulgar los concomimientos matemáticos en la sociedad. Por otra parte, en colaboración con el sistema universitario, IEMath dispondrá de mecanismos para respaldar y acoger a los jóvenes matemáticos durante las primeras fases de su carrera.

Algunas de las líneas de investigación abiertas gracias al IEMath y en las que se trabaja en la actualidad:

- ✓ *Modelos matemáticos para comprender la realidad*

El grupo de investigación de Matemática aplicada de la Universidad de Málaga, se centra en el estudio de modelos matemáticos. Para que un sistema real pueda ser objeto de modelado matemático es necesario que su estado sea representable mediante variables numéricas

- ✓ *Educación Estadística: una oportunidad actual*

El Grupo Teoría de la Educación Matemática y Educación Estadística de la Universidad de Granada, se dedica a profundizar en la didáctica de la Estadística y al estudio de los errores de su uso.

- ✓ *Matemáticas para todos: cultura matemática y desarrollo tecnológico*

El Departamento de Matemáticas Aplicadas de la Universidad de Sevilla, trabajan actualmente en dos proyectos sobre matemática computacional basada en estudios de algoritmos y otro sobre clasificación automática de estilos musicales a partir de su similitud teórica.

- ✓ *Fenómenos naturales con base matemática*

El Grupo de Computación Natural de la Universidad de Sevilla, estudian fenómenos naturales que pueden explicarse con modelos matemáticos.

- ✓ *Biomatemática, ciencia exacta para los tumores*

El Departamento de Matemáticas de la Universidad de Jaén, está inmerso en un proyecto interdisciplinar que tiene como objetivo el estudio de un nuevo modelo matemático que simule la invasión inmune de los gliomas, tumores del sistema nervioso central.

ACTIVIDADES

1. *¿Qué conocimientos tienes sobre las matemáticas en el mundo Árabe?*
2. *¿Y sobre las matemáticas en Al-Ándalus?*
3. *¿La investigación científica y matemática debe recaer solamente en la investigación pública en las Universidades?*
4. *¿Es interesante que grupos de capital privado inviertan en investigación?*
5. *¿Conoces algún estudio científico que haya podido avanzar gracias a las matemáticas?*

LA APUESTA

«En el comedor de la casa de descanso, se inició durante la comida una conversación sobre el modo de calcular la *probabilidad* de los hechos. Un joven matemático, que se hallaba entre los presentes, sacó una moneda y dijo:

- Si tiro la moneda sobre la mesa, sin mirar, ¿qué probabilidad existe de que caiga con el escudo hacia arriba?

- Ante todo, haga el favor de explicar lo que quiere usted decir con eso de la probabilidad –dijo una voz-. No está claro para todos.

- ¡Esto es muy sencillo! La moneda puede caer sobre la mesa de dos maneras, con el escudo hacia arriba o hacia abajo. El número de casos posibles es igual a 2, de los cuales, para el hecho que nos interesa, es favorable sólo uno de ellos. De lo dicho se deduce la siguiente relación:

el número de casos favorables = 1 *el número de casos posibles* =2

La fracción ½ expresa la probabilidad de que la moneda caiga con el escudo hacia arriba.

- Con la moneda es muy sencillo –añadió uno-. Veamos un caso más complicado, con los dados.

- Bueno, vamos a examinarlo –aceptó el matemático-. Tenemos un dado, o sea, un cubo con distintas cifras en las caras. ¿Qué probabilidad hay de que al echar el dado sobre la mesa, éste quede con una cifra determinada arriba, por ejemplo, el seis? ¿Cuántos son aquí los casos posibles? El dado puede quedarse sobre una cualquiera de las 6 caras, lo que significa que son posibles 6 casos diferentes. De ellos solamente uno es favorable para nuestro propósito, o sea, cuando quede arriba el seis. Por consiguiente, la probabilidad se obtiene dividiendo 1 por 6, es decir, se expresa con la fracción 1/6.

- ¿Será posible que puedan determinarse las probabilidades en todos los casos? –preguntó una de las personas presentes-. Tomemos el siguiente ejemplo. Yo digo que el primer transeúnte que va a pasar por delante de la ventana del comedor será un hombre. ¿Qué probabilidad hay de que acierte?

- Es evidente que la probabilidad es igual a ½, si convenimos que en el mundo hay tantos hombres como mujeres.

- ¿Qué probabilidad existe de que los *dos* primeros transeúntes que pasen sean ambos hombres? –preguntó otro de los veraneantes.

- Este cálculo es algo más complicado. Enumeremos los casos que pueden presentarse. Primero: es posible que los dos transeúntes sean hombres. Segundo: que primero aparezca un hombre y después una mujer. Tercero: que primero aparezca una mujer y después un hombre. Y finalmente el cuarto caso: que ambos transeúntes sean mujeres. Por consiguiente, el número de casos posibles es igual a 4; de ellos sólo 1, el primero, nos es favorable. La probabilidad vendrá expresada por la fracción ¼. He aquí, pues, la resolución del problema.

- Comprendido. Pero puede hacerse también la pregunta respecto a *tres* hombres. ¿Cuál será la probabilidad de que los *tres* primeros transeúntes sean todos hombres?

- Bien, calculemos también este caso. Comencemos por hallar los casos posibles. Para dos transeúntes, el número de casos posibles, como ya sabemos es igual a cuatro. Al aumentar un tercer transeúnte el número de casos posibles se duplica, puesto que a cada grupo de los 4 enumerados, compuesto de dos transeúntes, puede añadirse, bien un hombre, bien una mujer. En total, el número de casos posibles será 4x2=8. Evidentemente, la probabilidad será igual a 1/8., porque sólo tenemos un caso favorable. De lo dicho, se deduce la regla para efectuar el cálculo: en el caso de dos transeúntes, la probabilidad será ; $1/2 \times 1/2 = 1/4$; cuando se trata de tres tendremos $1/2 \times 1/2 \times 1/2 = 1/8$; en el caso de cuatro, las probabilidades se obtendrán multiplicando cuatro veces consecutivas ½ y así sucesivamente. Como vemos la magnitud de la probabilidad va disminuyendo.

- ¿Cuál será su valor, por ejemplo, para diez transeúntes?

- Es decir, ¿cuál es la probabilidad de que los diez primeros transeúntes sean todos hombres? Tomando ½ como factor diez veces obtenemos $\frac{1}{1024}$, o sea, menos de una milésima. Esto significa que si usted apuesta conmigo 1 rublo a que eso ocurrirá, yo puedo jugar mil rublos a que no sucederá así.

- ¡Qué apuesta más ventajosa! –dijo uno-. Yo de buen grado pondría un rublo para ganar mil.

- Pero tenga usted en cuenta que son mil probabilidades contra una.

- ¡Y qué! Arriesgaría con gusto un rublo contra mil, incluso en el caso de que se exigiera que los cien primeros transeúntes fueran todos hombres.

- ¿Pero se da usted cuenta de qué probabilidad tan ínfima existe de que suceda así? –preguntó el matemático.

- Seguramente una millonésima o algo así por el estilo.

- ¡Muchísimo menos! Una millonésima resulta ya cuando se trata de 20 transeúntes. Para cien será… Permítame que lo calcule aproximadamente.

- Una billonésima, trillonésima, cuatrillonésima… ¡Oh! Una unidad con treinta ceros.

- ¿Nada más?

- ¿Le parecen a usted pocos ceros? Las gotas de agua que contiene el océano no llegan ni a la milésima parte de dicho número.

- ¡Qué cifra tan imponente! En ese caso, ¿cuánto apostaría usted contra mi rublo?

- ¡Ja, ja,…! ¡Todo! Todo lo que tengo.

- Eso es demasiado. Juéguese su bicicleta. Estoy seguro de que no la apuesta.

- ¿Por qué no? Venga, la bicicleta si usted quiere. No arriesgo nada en la apuesta.

- Yo sí que no expongo nada; al fin y al cabo, un rublo no es una gran suma y, sin embargo, tengo la probabilidad de ganar una bicicleta, mientras que usted casi no puede ganar nada.

- Pero comprenda usted que es completamente seguro que va a perder. La bicicleta no será nunca suya, mientras que el rublo puede decirse que ya lo tengo en el bolsillo.

- ¿Qué hace usted? –dijo al matemático uno de sus amigos, tratando de contenerlo- Por un rublo arriesga usted su bicicleta. ¡Usted está loco!

- Al contrario –contestó el matemático-, la locura es apostar, aunque sea un rublo, en semejantes condiciones. Es seguro que gano. Es lo mismo que tirar el rublo.

- Pero ¿de todos modos existe una probabilidad?

- ¡Una gota de agua en el océano, mejor dicho, en diez océanos! Esa es la probabilidad: diez océanos de mi parte contra una gota. Que gano la apuesta es tan seguro como dos y dos son cuatro.

- No se entusiasme usted tanto, querido joven –sonó la voz tranquila de un anciano, que durante todo el tiempo había escuchado en silencio la disputa-. No se entusiasme.

- ¿Cómo, profesor, también usted razona así?

- ¿Ha pensado usted que en este asunto no todos los casos tienen las mismas probabilidades? El cálculo de probabilidades se cumple concretamente sólo en los casos de idéntica posibilidad ¿no es verdad? En el ejemplo que examinamos…, sin ir más lejos –dijo el anciano prestando oído-, me parece que la propia realidad viene ahora mismo a demostrar su equivocación. ¿No oyen ustedes? Parece que suena una marcha militar, ¿verdad?

- ¿Qué tiene que ver aquí la música? –comenzó a decir el joven matemático, quedándose cortado de pronto. En su rostro se expresaba el susto. Saltó del asiento, corrió hacia la ventana y asomó la cabeza.

- ¡Así es! –exclamó con desaliento-. He perdido la apuesta. ¡Adiós mi bicicleta!

Al cabo de un minuto quedó todo claro. Efectivamente, frente a la ventana pasó desfilando un batallón de soldados."

ACTIVIDADES:

1. *En este texto se define una regla matemática para expresar la probabilidad de un suceso simple. Enuncia esa regla.*

2. *¿Se puede aplicar la regla en cualquier situación?*

3. *¿En qué consiste la apuesta que realiza el joven matemático? ¿La gana o la pierde? ¿Por qué le fallaron los cálculos?*

4. *El joven matemático recurre a una metáfora. Transcribe la frase en que aparece esta figura literaria.*